## ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ **کدام تابع یا توابع در فاصلهٔ $\circ \le x \le ۳$ می‌توانند، جواب معادله روبرو باشند؟** $\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) - xy = \circ$

۱) فقط $J_\circ(x)$

۲) $J_\circ(x), Y_\circ(x)$

۳) فقط $I_\circ(x)$

۴) $I_\circ(x), K_\circ(x)$

۲ ـ **کدام یک از عبارات زیر در مورد توابع بسل صحیح است؟**

۱) $J_\circ(\circ) = \circ, I_\circ(\circ) = \circ, k_\circ(\circ) = +\infty, Y_\circ(\circ) = -\infty$ / توابع $J_n(x)$، $Y_n(x)$ و $K_n(x)$ با افزایش x میرا می‌شوند.

۲) $J_\circ(\circ) = ۱, I_\circ(\circ) = ۱, k_\circ(\circ) = -\infty, Y_\circ(\circ) = +\infty$ / تابع $J_n(x)$، $Y_n(x)$ و $K_n(x)$ با افزایش x میرا می‌شوند.

۳) $J_\circ(\circ) = ۱, I_\circ(\circ) = \circ, k_\circ(\circ) = +\infty, Y_\circ(\circ) = -\infty$ / تابع $I_n(x)$، با افزایش x واگرا می‌شود.

۴) $J_\circ(\circ) = ۱, I_\circ(\circ) = ۱, k_\circ(\circ) = +\infty, Y_\circ(\circ) = -\infty$ / تابع $I_n(x)$، با افزایش x واگرا می‌شود.

۳ ـ **فرض کنید $L[f(t)] = F(s)$ وجود داشته باشد، تبدیل لاپلاس $\frac{۱}{\alpha}e^{-\frac{\beta t}{\alpha}}f(\frac{t}{\alpha})$ کدام یک از عبارات زیر می‌باشد؟**

۱) $F(\alpha s - \beta)$

۲) $F(\beta s - \alpha)$

۳) $F(\alpha s + \beta)$

۴) $F(\beta s + \alpha)$

www.topsoal.ir

۴ ــ جواب معادله انتگرالی روبرو در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ $y'+\int_0^x y(x)dx=1\ ,\ y(0)=1$

۱) $0$
۲) $1+\frac{\pi}{2}$
۳) $1$
۴) $1-\frac{\pi}{2}$

۵ ــ کدام عبارت زیر چندجمله‌ای $f(x)=5x^3-3x^2-x-1$ را برحسب چند جمله‌های لژاندر بیان می‌کند؟

۱) $2[-P_0(x)+P_1(x)-P_2(x)+P_3(x)]$
۲) $2[P_0(x)+P_1(x)-P_2(x)+P_3(x)]$
۳) $2[-P_0(x)+P_1(x)+P_2(x)+P_3(x)]$
۴) $2[P_0(x)+P_1(x)+P_2(x)+P_3(x)]$

۶ ــ اگر $\int_0^b e^{-u^2}du=\frac{2\sqrt{\pi}}{5}$ باشد، مقدار $erfc(b)$ کدام است؟

۱) $1-\frac{2\sqrt{\pi}}{5}$
۲) $0/2$
۳) $0/8$
۴) $\frac{3\sqrt{\pi}}{5}$

۷ ــ کدام گزینه در مورد توابع اورتوگونال صحیح و کامل است؟

۱) مجموعه توابع بسل نوع اول $(J_p)$ اورتوگونال نمی‌باشند.
۲) توابع لگاریتمی و هیپربولیک اورتوگونال نیستند و قابل تبدیل به اورتوگونال هم نمی‌باشند.
۳) مجموعه توابع بسل نوع دوم $(Y_p)$، نوع سوم $(I_p)$ و نوع چهارم $(k_p)$ غیر اورتوگونال هستند ولی قابل تبدیل به اورتوگونال می‌باشند.
۴) گزینه ۱ و ۲

۸ ــ تبدیل لاپلاس معکوس عبارت $\frac{3S+13}{S^2+4S+3}$ کدام است؟

۱) $e^{3t}-4e^{2t}$
۲) $2e^{3t}-4e^{t}$
۳) $e^{-3t}-5e^{t}$
۴) $-2e^{-3t}+5e^{-t}$

۹ ــ اگر سری فوریه $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0<t<2\\ f(t+2)=f(t)\end{cases}$ به صورت $\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t+(\frac{-4}{n\pi})\sin n\pi t]$ باشد، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^4}{6}$
۲) $\frac{\pi^2}{9}$
۳) $\frac{\pi^4}{90}$
۴) $\frac{\pi^4}{96}$

۱۰ ــ ضریب $C_0$ در بسط سری فوریه مختلط تابع $-1<t<1$ و $f(t)=t$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $-1$
۴) $1$

۱۱ ــ با توجه به تبدیل انتگرال فوریه، حاصل $\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}$ وقتی $x\geq 0$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}e^{-x}$
۲) $\frac{\pi}{2}e^{-x}$
۳) $\frac{\pi}{2}e^{x}$
۴) $\frac{\pi}{2}e^{2x}$

۱۲ ــ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $(a>0)f(x)=e^{-ax}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{a}{a^2+\omega^2})$
۲) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\frac{a}{a^2+\omega^2})$
۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\omega}{a^2+\omega^2})$
۴) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\frac{\omega}{a^2+\omega^2})$

۱۳ ــ اگر $P_n$ نماینده تابع لژاندر باشد و $P_5=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$ باشد، حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1}P_5^2(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$
۲) $\frac{2}{12}$
۳) $\frac{1}{11}$
۴) $\frac{2}{11}$

www.topsoal.ir

۱۴ ـ معادله دیفرانسیل $y''+\cot xy'+ky=0$ به همراه شرایط مرزی زیر را در نظر می‌گیریم. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو حل مستقل به ازای مقادیر متمایز $k_1$ و $k_2$ برای معادله فوق باشند، کدام گزینه صحیح است؟

$$y(\frac{\pi}{2})=y'(\frac{\pi}{2}),y(\frac{\pi}{4})=y'(\frac{\pi}{4})$$

۱) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y_1y_2\sin xdx=0$

۲) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y_1y_2\cos xdx=0$

۳) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y_1y_2\cos xdx=0$

۴) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} y_1y_2\sin xdx=0$

۱۵ ـ مقدار انتگرال $\int_0^\infty te^{-2t}\cos tdt$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{-1}{5}$

۲) $\frac{3}{25}$

۳) $\frac{1}{5}$

۴) $\frac{2}{25}$

۱۶ ـ اگر $Y(s)$ تبدیل لاپلاس معادلهٔ $y''+ty=0$ با شرایط مرزی $y'(0)=0$ و $y(0)=1$ باشد، آنگاه $Y$ در کدام یک از معادلات زیر صدق می‌کند؟

۱) $Y'+S^2Y=S^2$

۲) $Y'-S^2Y=-S$

۳) $Y'-SY=S^2$

۴) $SY'+S^2Y=S^3$

۱۷ ـ هر گاه نماد $L$ بیان کننده مقدار لاپلاسین $y$ باشد، مقدار $L$ برای معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$y''(t)+2\int_0^t y(u)du=t\sin t,y(0)=y'(0)=0$$

۱) $L=\frac{2(S^3+2)}{S(1+S^2)^2}$

۲) $L=\frac{(1+S^2)(S^3+2)}{2S^2}$

۳) $L=\frac{(1+S^2)^2}{2(S^3+2)S}$

۴) $L=\frac{2S^2}{(1+S^2)^2(S^3+2)}$

۱۸ ـ سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x\le\pi\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{2k}$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}$

۳) $\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx$

۴) $\sum_{k=1}^{2}[\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+\frac{1}{k}\cos kx)$

۱۹ ـ انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x<\pi\\ 0 & \text{بقیه نقاط}\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\omega x+\cos\omega(\pi-x)}{1-\omega^2}d\omega$

۲) $f(x)=\pi\int_0^\infty\frac{\cos\omega x-\cos\omega(\pi-x)}{1-\omega^2}d\omega$

۳) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\omega x+\cos\omega(\pi-x)}{\omega^2-1}d\omega$

۴) $f(x)=\pi\int_0^\infty\frac{\sin\omega x-\cos(\pi-x)}{1-\omega^2}d\omega$

۲۰ ـ مقدار انتگرال $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}$ کدام است؟

۱) $\Gamma(\frac{1}{2})$

۲) $\Gamma(\frac{3}{4})$

۳) $\Gamma(2)$

۴) $\Gamma(\sqrt{2})$

www.topsoal.ir

## ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ گزینه «۴»

معادله روبرو را معادله بسل می‌نامیم: $x^{2}y''+xy'+(x^{2}-p^{2})y=0$

جواب عمومی معادله فوق به صورت زیر است: $y=AJ_{p}(x)+BY_{p}(x) \Leftarrow$ اگر P عدد صحیح باشد.

$y=AJ_{p}(x)+BJ_{-p}(x) \Leftarrow$ اگر P عدد صحیح نباشد.

همچنین معادله روبرو را معادله بسل اصلاح شده یا تعدیل شده می‌نامیم: $x^{2}y''+xy'-(x^{2}+p^{2})y=0$

جواب عمومی معادله فوق به صورت زیر است: $y=AI_{p}(x)+BK_{p}(x) \Leftarrow$ اگر P عدد صحیح یا صفر باشد.

$y=AI_{p}(x)+BI_{-p}(x) \Leftarrow$ اگر P عدد صحیح یا صفر نباشد.

همچنین برخی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل نمود:

$$(1)\quad x^{2}y''+xy'+(n^{2}x^{2}-m^{2})y=0 \xrightarrow{z=nx} z^{2}y''+zy'+(z^{2}-m^{2})y=0$$

$$(2)\quad x^{2}y''+axy'+(b+Cx^{m})y=0 \xrightarrow[m,c\neq 0]{m,c,b,a\ \text{ثابت}} t=\gamma x^{\beta}, u=x^{\alpha}t \rightarrow \text{معادله بسل}$$

در این مسأله $\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx})-xy=0 \Rightarrow xy''+y'-xy=0 \Rightarrow x^{2}y''+xy'-x^{2}y=0 \Rightarrow$ جواب عمومی : $y=AI_{0}(x)+Bk_{0}(x)$

به ازای $x=0$ مقدار تابع بی‌نهایت می‌شود ولی دلیلی

بر نامحدود شدن تابع در نقطه $x=0$ موجود نمی‌باشد پس هم تابع بسل نوع سوم و هم تابع بسل نوع چهارم قابل قبول است.

www.topsoal.ir

**۲ ـ گزینه «۴»**

خواص و رفتار توابع بسل وقتی که $x \to 0$ و $x \to \infty$ میل می‌کند:

(۱) $P = 0 \Rightarrow J_0(0) = I_0(0) = 1$

(۲) $P > 0 \Rightarrow J_p(0) = I_p(0) = 0$

(۳) P مثبت و غیرصحیح $\Rightarrow J_{-p}(0) \pm I_{-p}(0) \to \pm\infty$

(۴) به ازای کلیه مقادیر P $\Rightarrow -Y_p(0), K_p(0) \to \infty$

بنابراین تنها $J_p(x)$ و $I_p(x)$ جواب‌های فیزیکی قابل قبول در $x = 0$ هستند.

(۵) توابع $K_n(x), Y_n(x), J_n(x)$ با افزایش x میرا می‌شوند.

(۶) تابع $I_n(x)$ با افزایش x واگرا می‌شود.

(۷) P صحیح $\Rightarrow J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$

(۸) $P \neq 0 \Rightarrow J_0(0) = 1, J_p(0) = 0$

(۹) P صحیح $\Rightarrow Y_{-p}(x) = (-1)^p Y_p(x)$

(۱۰) $P \neq 0 \Rightarrow Y_p(0) \to -\infty$

(۱۱) P صحیح $\Rightarrow I_{-p}(x) = I_p(x)$

(۱۲) $I_p(0) = 0$

(۱۳) P صحیح $\Rightarrow K_{-p}(x) = K_p(x)$

(۱۴) $\to K_p(0) \to +\infty$

$J_p$ تابع بسل نوع اول

$Y_p$ تابع بسل نوع دوم

$I_p$ تابع بسل نوع سوم

$K_p$ تابع بسل نوع چهارم

* خواص و تغییرات تابع بسل وقتی که x به سمت صفر یا بی‌نهایت میل می‌کند بسیار مهم است.

**۳ ـ گزینه «۳»**

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و a یک عدد ثابت باشد داریم:

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}), L^{-1}[F(as)] = \frac{1}{a}f(\frac{t}{a})$$

همچنین هرگاه a یک عدد حقیقی دلخواه و $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a), L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$$

در این مسأله از خاصیت تغییر مقیاس و قضیه اول انتقال استفاده می‌کنیم در نتیجه:

$$L[\frac{1}{\alpha}e^{-\beta(\frac{t}{\alpha})}f(\frac{t}{\alpha})] = \frac{1}{\alpha}L[e^{-\beta(\frac{t}{\alpha})}f(\frac{t}{\alpha})] = \frac{1}{\alpha}\times\alpha F(\alpha s+\beta) = \boxed{F(\alpha s+\beta)}$$

* دانستن برخی خواص تبدیلات لاپلاس مانند تغییر مقیاس و قضیه اول انتقال در حل برخی تست‌های پارامتری تبدیلات لاپلاس حائز اهمیت است.

www.topsoal.ir

**۴ ـ گزینه «۳»**

حل معادله انتگرال به کمک تبدیل لاپلاس

$L[f'(t)]=SF(s)-f(0) \xleftarrow{\text{مشتق اول}} n=1$ تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

$L[\int_0^t f(u)du]=\dfrac{F(s)}{S}$ تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع

$Sy(s)-y(0)+\dfrac{y(s)}{s}=\dfrac{1}{s} \Leftarrow$ از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$\Rightarrow Sy(s)-1+\frac{y(s)}{s}=\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow y(s)(\frac{s^2+1}{s})=\frac{s+1}{s}$$

$$\Rightarrow y(s)=\frac{s+1}{s^2+1}$$

$y(t)=\cos t+\sin t \Leftarrow$ لاپلاس معکوس می‌گیریم

$$\Rightarrow y(\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2})=0+1 \Rightarrow \boxed{y(\frac{\pi}{2})=1}$$

* در حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال به روش تبدیلات لاپلاس باید قضایای مربوط به صورت کاربردی به کار بسته شود.

**۵ ـ گزینه «۱»**

شکل کلی معادله لژاندر به صورت زیر است:

$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(1+\alpha)y=0$    $\alpha$ عدد حقیقی

$x=0$ یک نقطه عادی برای معادله لژاندر است لذا این معادله جوابی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ دارد.

**قضیه:** مجموعه چند جمله‌ای‌های لژاندر در فاصله $[-1,1]$ متعامد هستند یعنی: $m\neq n$   $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$

به این ترتیب اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دیریکله (Dirichlet) صدق کند آنگاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در فاصله $-L<x<L$ داریم:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x)$$

که در آن: $C_n=\dfrac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$

و در هر نقطه ناپیوستگی، سری فوق به عدد $\frac{1}{2}[f(x)^{+}+f(x)^{-}]$ همگراست.

در این مسأله: $5x^3-3x^2-x-1=C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)+C_3P_3(x) \Leftarrow$ چون $f(x)$ از درجه ۳ می‌باشد.

$C_0=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3-3x^2-x-1)(1)dx=-2$ که در آن

$$C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3-3x^2-x-1)(x)dx=2$$

$$C_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3-3x^2-x-1)(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})dx=-2$$

www.topsoal.ir

$$C_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3 - 3x^2 - x - 1)(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x)dx = 2$$

در نتیجه $5x^3 - 3x^2 - x - 1 = 2[-P_0(x) + P_1(x) - P_2(x) + P_3(x)]$

**۶** ـ گزینه «۲»

تابع خط به شکل روبرو تعریف می‌شود: $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

در حل برخی از معادلات دیفرانسیل مربوط به انتقال گرما و انتقال جرم با تابع خطا مواجه می‌شویم.

تابع خطای مکمل هم به شکل روبرو تعریف می‌شود: $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$

**خواص تابع خطا و تابع خطای مکمل**

(۱) $\mathrm{erf}(0) = 0\ ,\ \mathrm{erf}(\infty) = 1$

(۲) $\mathrm{erfc}(0) = 1\ ,\ \mathrm{erfc}(\infty) = 0$

(۳) $\mathrm{erfc}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$

(۴) $\frac{d}{dx}\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$

$$\mathrm{erf}(b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^b e^{-u^2}du \Rightarrow \mathrm{erfc}(b) = 1 - \mathrm{erf}(b)$$

$$\Rightarrow \int_0^b e^{-u^2}du = \frac{2\sqrt{\pi}}{5} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^b e^{-u^2}du = \frac{4}{5} \Rightarrow \mathrm{erf}(b) = \frac{4}{5} = 0/8 \Rightarrow \boxed{\mathrm{erfc}(b) = 1 - 0/8 = 0/2}$$

**نکته:** با گزینه ۳ اشتباه نشود (تشابه گزینه‌های ۲ و ۳ که به ترتیب مقادیر erf(b) و ertc (b) ممکن است دانشجو را به اشتباه اندازد.)

**۷** ـ گزینه «۲»

توابع متعامد (اورتوگونال)

۱ـ دسته توابع غیرصفر و انتگرال‌پذیر $\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_n(x)$ را در بازه $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. ضرب عددی در این مجموعه به شکل زیر بیان می‌شود: $< \phi_m, \phi_n > = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx \quad m \neq n$. نُرم هر تابع $\phi_m(x)$ هم به شکل زیر بیان می‌شود:

$\|\phi_m(x)\| = [\int_a^b \phi_m^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}$ مجموعه توابع ذکر شده را متعامد می‌نامیم هر گاه داشته باشیم:

$$< \phi_m, \phi_n > = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0$$

www.topsoal.ir

۲ـ هر دسته توابع متعامد مستقل خطی می‌باشند بنابراین هر گاه دسته توابع $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x),...,\phi_n(x)$ در بازه $[a,b]$ متعامد بوده و تابع $y=f(x)$ در این بازه انتگرال‌پذیر باشد می‌توان $f(x)$ را به شکل ترکیب خطی از $\phi_m(x)$ها نوشت در نتیجه:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\phi_n(x) \qquad , \qquad C_n=\frac{1}{\|\phi_n(x)\|^2}\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$$

۳ـ هرگاه دسته توابع $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x),...,\phi_n(x)$ متعامد نباشند ولی بتوان تابعی مثل $\omega(x)$ (تابع وزنی weight function) پیدا کرد به طوری که دسته توابع $\theta_m(x)=\sqrt{\omega(x)}\phi_m(x)$ تشکیل یک مجموعه متعامد در بازه $[a,b]$ را دهند یعنی:

$\int_a^b \omega(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx=0$ $(m\neq 0)$، گوییم دسته توابع ذکر شده در بازه $[a,b]$ با تابع وزنی $\omega(x)$ متعامد هستند.

**نکته:**

۱ـ مجموعه توابع بسل نوع اول $(J_p)$ اورتوگونال نمی‌باشند ولی قابل تبدیل به اورتوگونال با تابع وزنی $\omega(x)=x$ می‌باشند.

۲ـ مجموعه توابع $\sin x$ و $\cos x$ اورتوگونال هستند.

۳ـ توابع لگاریتمی و هیپربولیک غیر اورتوگونال هستند.

۴ـ توابع بسل نوع دوم $(Y_p)$، نوع سوم $(I_p)$ و نوع چهارم $(K_p)$ غیر اورتوگونال هستند و قابل تبدیل به اورتوگونال هم نمی‌باشند.

۸ ـ گزینه «۴»

تعریف تبدیل لاپلاس و عکس تبدیل لاپلاس: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را که با $L[f(t)]$ یا $F(s)$ نشان می‌دهیم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$L[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

که $S$ می‌تواند یک متغیر حقیقی یا مختلط باشد.

می‌توانیم انتگرال ناسره فوق را به شکل زیر هم بنویسیم که در این تعریف فرض می‌شود که تابع $f(t)$ برای $t\geq 0$ تعریف شده باشد:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt$$

همچنین تابع $f(t)$ را عکس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ می‌نامیم و به شکل روبرو نشان می‌دهیم:

$$L^{-1}[F(s)]=f(t)$$

**نکته:**

$$f(t)=e^{at} \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s-a}$$

$$\frac{3s+13}{s^2+4s+3}=\frac{3s+13}{(s+3)(s+1)}=\frac{-2}{s+3}+\frac{5}{s+1} \Rightarrow L^{-1}[\frac{-2}{s+3}+\frac{5}{s+1}]=-2e^{-3t}+5e^{-t}$$

www.topsoal.ir

**۹** ـ گزینه «۳»

اتحاد پارسوال و شرایط دیریکله

هرگاه $a_n$ و $b_n$ ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ باشند و شرایط دیریکله برای تابع $f(x)$ صادق باشند آنگاه رابطه زیر تحت عنوان اتحاد پارسوال برقرار است:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^{2}dx=\frac{a_0^{2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{2}+b_n^{2})$$

شرایط دیریکله برای همگرایی سری فوریه:

الف ـ تابع $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $2L$ است.

ب ـ تابع $f(x)$ در بازهٔ $(-L,L)$ تعریف شده است.

ج ـ توابع $f(x)$ و $f'(x)$ در بازهٔ $(-L,L)$ تکه تکه پیوسته هستند (یعنی این بازه تعداد گسستگی‌ها و همچنین نقاط Max و Min متناهی است.)

درنتیجه در این صورت سری فوریه ذکر شده در هر نقطه پیوستگی x به سمت $f(x)$ و در هر نقطه ناپیوستگی x به سمت $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ همگرا است.

**نکته مهم:** سه شرط ذکر شده شرایط کافی (نه لازم) برای همگرایی سری فوریه تابع $f(x)$ هستند یعنی با برقراری این شرایط همگرایی تضمین می‌گردد ولی درصورت عدم برقراری شرایط، وضعیت همگرایی مشخص نمی‌شود.

دوره تناوب $2L=2 \Rightarrow L=1$ ، با توجه به سری فوریه تابع داده شده $\Rightarrow a_0=\frac{8}{3}, a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}, b_n=\frac{-4}{n\pi}$

اتحاد پارسوال $\Rightarrow \int_0^2 (t^2)^2dt=\frac{(\frac{8}{3})^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2\pi^2})^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{4}{n\pi})^2$

$$\frac{t^5}{5}]_0^2=\frac{32}{9}+\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ از طرفی $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{5}=\frac{32}{9}+\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{16}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{16}(\frac{32}{5}-\frac{32}{9}-\frac{8}{3})=\boxed{\frac{\pi^4}{90}}$$

**۱۰** ـ گزینه «۱»

تبدیل فوریه و سری فوریه مختلط

با فرض اینکه شرایط دیریکله برای سری فوریه برقرار باشد (توضیحات شرایط دیریکله در سوال شماره ۱۳۹ آمده است.) از اتحاد اولر که به شکل $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ بیان می‌شود و با انجام یکسری محاسبات جبری به رابطه زیر می‌رسیم که شکل مختلط سری فوریه تابع $f(x)$ است:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{in\pi}{L}x}\ (I)\ \xrightarrow{\text{که در آن}} C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}e^{-\frac{in\pi}{L}x}f(x)dx$$

رابطه فوق با فرض پیوسته بودن $f(x)$ در x نوشته شده است. اگر x یک نقطه گسستگی تابع باشد آنگاه در معادلهٔ (I) بـه جـای $f(x)$ عبارت $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ را قرار می‌دهیم.

دوره تناوب $L=1$ $f(t)=t$

$$\Rightarrow C_0=\frac{1}{2\times1}\int_{-1}^{1}1\times tdt=\frac{1}{2}[\frac{t^2}{2}]_{-1}^{1}=0 \Rightarrow \boxed{C_0=0}$$

※ شکل مختلط سری فوریه در محاسبه ضرایب سری فوریه مهم است.

www.topsoal.ir

**۱۱ ـ گزینه «۲»**

انتگرال فوریه، انتگرال لاپلاس

هرگاه تابع $f(x)$ یک تابع تکه تکه پیوسته باشد که در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست بوده و $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ کراندار باشد، می‌توان آن را به شکل انتگرال فوریه بیان نمود:

$$f(x)=\int_{\circ}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

که در آن $A(\omega)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx \quad , \quad B(\omega)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$

رابطه فوق با فرض پیوسته بودن $f(x)$ در $x$ نوشته شده است و اگر $x$ یک نقطه گسستگی تابع باشد در معادله به جای $f(x)$ عبارت $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{۲}$ را قرار دهیم.

**نکته:** با توجه به روابط انتگرال فوریه می‌توان روابط زیر را به دست آورد که به انتگرال‌های لاپلاس معروف هستند.

$$(۱)\qquad \int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^{۲}+\omega^{۲}}d\omega=\frac{\pi}{۲\alpha}e^{-\alpha x}\qquad\qquad (۲)\qquad \int_{\circ}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\alpha^{۲}+\omega^{۲}}d\omega=\frac{\pi}{۲}e^{-\alpha x}$$

$$\alpha=۱,\omega=\alpha\xrightarrow{\text{رابطه }(۱)}\int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\alpha^{۲}+۱}=\boxed{\frac{\pi}{۲}e^{-x}}$$

**۱۲ ـ گزینه «۱»**

تبدیل فوریه (تبدیل کسینوسی و سینوسی)

$$f(x)\text{ تبدیل فوریه تابع}\rightarrow F[f(x)]=F(\omega)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx$$

$$f(x)\text{ عکس تبدیل فوریه تابع}\rightarrow F^{-۱}[F(\omega)]=f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}F(\omega)d\omega$$

اگر $f(x)$ تابع زوج باشد. $\rightarrow$ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ $\rightarrow F_c[f(x)]=F_c(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$

$$\rightarrow f(x)\text{ عکس تبدیل فوریه کسینوسی تابع}\rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega x dx$$

اگر $f(x)$ تابع فرد باشد. $\rightarrow$ تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)$ $\rightarrow F_S[f(x)]=F_S(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$

$$\rightarrow f(x)\text{ عکس تبدیل فوریه سینوسی تابع}\rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\infty}F_S(\omega)\sin\omega x dx$$

$$F_c[f(x)]=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\infty}e^{-ax}\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left[\frac{e^{-ax}(\omega\sin\omega x-a\cos\omega x)}{a^{۲}+\omega^{۲}}\right]_{\circ}^{\infty}=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\frac{a}{a^{۲}+\omega^{۲}}\right)$$

www.topsoal.ir

**۱۳ ـ گزینه «۴»**

تعامد برخی از توابع و بسط یک تابع برحسب آنها (تعامد چند جمله‌ای‌های لژاندر)

چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازهٔ $[-۱,۱]$ متعامد هستند یعنی:

$$\int_{-۱}^{۱} P_n(x)P_m(x)dx = ۰ \quad (m \neq n) \quad , \quad \int_{-۱}^{۱} P_n^۲(x)dx = \frac{۲}{۲n+۱}$$

$$\int_{-۱}^{۱} P_۵^۲(x)dx = \frac{۲}{۲\times ۵+۱} = \frac{۲}{۱۱} \qquad n = ۵$$

**نکته**

معادله دیفرانسیل زیر را معادله اشتروم لیوویل می‌نامیم که در آن $P(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ توابع حقیقی پیوسته در بازه $[a,b]$ هستند.

۱ـ $$\frac{d}{dx}[P(x)\frac{dy}{dx}]+[q(x)+\lambda r(x)]y = ۰ \quad a \leq x \leq b \quad \text{شرایط مرزی} \quad \begin{cases} \alpha_۱ y(a)+\alpha_۲ y'(a) = ۰ & \alpha_۱^۲+\alpha_۲^۲ \neq ۰ \\ \beta_۱ y(b)+\beta_۲ y'(b) = ۰ & \beta_۱^۲+\beta_۲^۲ \neq ۰ \end{cases}$$

که در آن $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و $\beta_۱$ و $\beta_۲$ اعداد ثابتی هستند.

۲ـ معادله دیفرانسیل لژاندر حالت خاصی از معادله اشتروم لیوویل است که در آن داریم:

$$P(x) = ۱-x^۲, q(x) = ۰, \lambda = m(m+۱), r(x) = ۱$$

❋ نحوه به دست آوردن ضرایب در معادله لژاندر اهمیت دارد.

**۱۴ ـ گزینه «۱»**

مقادیر ویژه و توابع ویژه در مسائل اشتروم لیوویل

در ادامه توضیحات سوال ۱۴۳ باید به این نکته اشاره کرد که:

هرگاه $\phi_۱(x)$ و $\phi_۲(x)$ و ... و $\phi_m(x)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل اشتروم لیوویل به ازای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ و ... و $\lambda_n$ باشند، می‌توان نشان داد که دسته توابع $\{\phi_۱(x),\phi_۲(x),...,\phi_n(x)\}$ نسبت به تابع وزنی $r(x)$ متعامد هستند یعنی:

$$\int_a^b r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = ۰$$

**نکته**

۱ـ هرگاه $r(x)$ مقدار ثابتی باشد، جواب‌های معادله متعامد هستند و اگر $r(x)$ مقدار ثابتی نباشد جواب‌های معادله نسبت به تابع وزنی $r(x)$ متعامد هستند.

۲ـ مقادیری از $\lambda$ها را که به ازای آنها معادله اشتروم لیوویل دارای جواب باشد، مقادیر ویژه و جواب‌های $\phi(x)$ متناظر با آنها را توابع ویژه می‌نامیم.

در این مسأله : $y''+y'\cot x+ky = ۰ \Rightarrow y''\sin x+y'\cos x+ky\sin x = ۰ \Rightarrow (\sin x.y')'+(k\sin x)y = ۰$

معادله حاصله حالت خاصی از معادله اشتروم لیوویل است که در آن:

$$P(x) = \sin x \ , \ q(x) = ۰ \ , \ r(x) = \sin x$$

www.topsoal.ir

بنابراین با توجه به خاصیت تعامد جواب‌های معادله اشتروم لیوویل با وزن $r(x)$ می‌توان گفت که $y_1$ و $y_2$ نسبت به تابع وزنی $\sin x$ در بازه $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ متعامد هستند یعنی:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y_1 y_2 \sin x = 0$$

❋ مدل کردن این نوع مسائل با سیستم اشتروم لیوویل حائز اهمیت است.

**۱۵ ـ گزینه «۲»**

تبدیل لاپلاس حاصلضرب تابع $f(t)$ در $t^n$

**نکته**

۱ـ تبدیل لاپلاس یک تبدیل یک به یک است.

۲ـ هر گاه دو تابع دارای تبدیل لاپلاس یکسان باشند آن دو تابع یکسان هستند.

۳ـ تبدیل لاپلاس و عکس تبدیل لاپلاس تبدیل‌های خطی هستند.

۴ـ هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد در نتیجه:

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{یا} \quad L^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t)$$

$F^n(s)$ مشتق مرتبه nام تابع $F(s)$ نسبت به s است.

با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس یک تابع $\Rightarrow \int_0^\infty e^{-2t} t\cos t dt = L[t\cos t]_{s=2} = -(\frac{s}{s^2+1})'_{s=2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{2^2-1}{(2^2+1)^2} = \frac{3}{25}$

❋ این نوع مسائل در قالب محاسبه انتگرال توابع $f(t)$ در $t^n$ به روش تبدیل لاپلاس در کنکور مهم است.

**۱۶ ـ گزینه «۲»**

تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

هرگاه تابع $f(t)$ و مشتقات آن تا مرتبه $(n-1)$ام در بازه $[0,\infty)$ پیوسته و $f^{(n)}(t)$ در این بازه تکه تکه پیوسته باشد، داریم:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0),\ldots, f^{(n-1)}(0)$$

در رابطه فوق $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است.

$$n=1 \Rightarrow L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$n=2 \Rightarrow L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$n=3 \Rightarrow L[f^{(3)}(t)] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

از رابطه فوق در حل معادلات دیفرانسیل به روش تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم.

از طرفین معادله دیفرانسیل، تبدیل لاپلاس می‌گیریم. $\Rightarrow L[y''] + L[ty] = 0 \Rightarrow [s^2 Y - sy(0) - y'(0)] + (-Y') = 0$

$$\Rightarrow S^2 Y - S\times 1 - 0 - Y' = 0 \Rightarrow Y' - S^2 Y = -S$$

www.topsoal.ir

**۱۷ ـ گزینه «۴»**

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، نتایج زیر برقرار است:

$$(1)\quad L[\int_0^t f(u)du]=\frac{F(s)}{s} \qquad (2)\,L^{-1}[\frac{F(s)}{s}]=\int_0^t f(u)du$$

از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم. $\Rightarrow L[y'']+2L[\int_0^t y(u)du]=L[t\sin t]$

$$\Rightarrow [s^2L-sy(0)-y'(0)]+2[\frac{L}{s}]=(-1)^1(\frac{1}{s^2+1})'$$

$$\Rightarrow s^2L+\frac{2L}{s}=\frac{2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow L(s^2+\frac{2}{s})=\frac{2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow L=\frac{2s^2}{(1+s^2)^2(s^3+2)}$$

**۱۸ ـ گزینه «۲»**

تعریف سری فوریه

تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم که در بازه $[-L,L]$ تعریف شده و دارای دوره تناوب $2L$ باشد. سری فوریه یا بسط فوریه متناظر با این تـابع به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$$

که در آن $a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx,\begin{cases}a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx\\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx\end{cases}$

$$L=\pi \Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1dx=\frac{1}{\pi}\times\pi=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\times\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\sin nx]_0^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\times\sin nx\times dx=\frac{-1}{n\pi}\cos nx]_0^{\pi}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{2}{n\pi} & n=2k+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}$$

❋ تعیین ضرایب $a_n$ و $b_n$ در سری فوریه برای توابع متناوب مهم است.

www.topsoal.ir

**۱۹ ـ** گزینه «۱»

انتگرال فوریه توابع زوج و فرد

انتگرال فوریه یک تابع زوج را می‌توان به شکل زیر بیان کرد که به آن انتگرال فوریه کسینوسی می‌گوییم:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega x d\omega \quad \text{که در آن} \quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$$

همچنین انتگرال فوریه یک تابع فرد را می‌توان به شکل زیر بیان کرد که به آن انتگرال فوریه سینوسی می‌گوییم:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty} B(\omega)\sin\omega x d\omega \quad \text{که درآن} \quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$$

با توجه به نکته سوال شماره ۱۴۱ $\Rightarrow A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos\omega x dx=\frac{1+\cos\pi\omega}{(1-\omega^2)\pi}$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin\omega x dx=\frac{\sin\pi\omega}{(1-\omega^2)\pi}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x+\cos\omega(\pi-x)}{1-\omega^2}d\omega$$

**۲۰ـ** گزینه «۱»

تابع گاما به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\Gamma(n)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$

تابع گاما به ازای $n>0$ همگراست.

خواص تابع گاما

$$(1)\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \qquad (2)\ \Gamma(1)=1$$

$(3)\ \Gamma(n+1)=n!$ (n عدد صحیح مثبت) $\qquad (4)\ \Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$

درحالت خاص $n=\frac{1}{2} \xrightarrow{(4)} \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

در این مسأله

تغییر متغیر $u=-Lnx \Rightarrow x=e^{-u}, dx=-e^{-u}du$

$x=1 \Rightarrow u=0 \quad , \quad x=0 \Rightarrow u=\infty$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\int_{0}^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du=\Gamma(\frac{1}{2})$$

* معمولاً سوالات محاسبه انتگرال در کنکور به یکی از ۳ روش زیر قابل حل است:

۱ـ تبدیل لاپلاس

۲ـ تابع خطا

۳ـ تابع گاما

www.topsoal.ir